

DOI: 10.16285/j.rsm.2017.12.021

基于 BUS 方法的无限长边坡可靠度更新

蒋水华^{1,2}, 姚 池¹, 杨建华¹, 周创兵¹

(1. 南昌大学 建筑工程学院, 江西 南昌 330031;

2. 中国科学院武汉岩土力学研究所 岩土力学与工程国家重点实验室, 湖北 武汉 430071)

摘 要: 某一特定岩土场地的试验数据、监测资料和观测信息等通常十分有限, 然而贝叶斯方法却可充分利用有限的场地信息克服试验数据样本量较小的不足。为有效估计有限样本条件下参数统计特征, 提出了基于结构可靠度方法和贝叶斯更新 (BUS) 的边坡可靠度更新方法, 通过融入直剪试验数据更新无限长边坡可靠度验证了提出方法的有效性, 并系统探讨了岩土体参数先验信息如试验样本量、概率分布和似然函数模型对边坡可靠度更新的影响规律。结果表明: BUS 方法能够考虑岩土体参数概率分布和似然函数模型的影响, 融入有限的场地信息准确地估计参数统计特征和更新边坡可靠度, 为解决有限样本条件下边坡可靠度更新问题提供了一条有效的途径。土体参数概率分布对边坡可靠度更新结果 (参数后验均值、标准差以及更新的失效概率) 具有重要的影响, 基于常用的正态和对数正态分布的边坡可靠度更新结果偏于保守, 相比之下, 似然函数模型对边坡可靠度更新结果的影响相对较小。此外, 岩土体参数不确定性和更新的边坡失效概率均随着试验样本量的增大而减小, 但当样本量增大到一定程度时它们的变化不大。

关 键 词: 边坡可靠度; 贝叶斯更新; 子集模拟; 先验信息; 概率分布

中图分类号: TU 45

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2017) 12-3555-10

Reliability updating for infinite soil slopes using BUS method

JIANG Shui-hua^{1,2}, YAO Chi¹, YANG Jian-hua¹, ZHOU Chuang-bing¹

(1. School of Civil Engineering and Architecture, Nanchang University, Nanchang, Jiangxi 330031, China; 2. State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering, Institute of Rock and Soil Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Wuhan, Hubei 430071, China)

Abstract: Generally, the test data for a specific site are very limited. However, the Bayes method can overcome the limitation of small sample size of test data. This paper aims to apply the Bayesian updating with structural reliability methods (BUS) to update the reliability of soil slopes and estimate statistics of soil properties with limited site-investigation data. The effectiveness of the proposed approach for slope reliability is demonstrated by an infinite soil slope with direct shear test. The effects of prior information of soil properties including sample size of test data, marginal probability distribution and likelihood function on the slope reliability updating are systematically investigated. The results indicate that the BUS method can accurately estimate the statistics of soil properties and update the slope reliability incorporating limited site information and the effects of probability distribution and likelihood function. The probability distribution of soil properties has a significant effect on the updated slope reliability results (e.g., posterior mean and standard deviation, updated probability of failure). It will lead to conservative estimates of the slope reliability results when the normal or lognormal distributions are used. In contrast, the likelihood function has a slight influence on the updated slope reliability. In addition, the uncertainties of soil properties and updated probability of failure decrease as the sample size of test data increases, but they will change slightly once the sample size reaches a certain value.

Keywords: slope reliability; Bayesian updating; subset simulation; prior information; probability distribution

收稿日期: 2016-01-04

基金项目: 国家自然科学基金项目 (No.51509125, No.51679117); 岩土力学与工程国家重点实验室开放基金项目 (No.Z016014); 江西省自然科学基金项目 (No.20171BAB206058); 中国科协青年人才托举工程项目。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (51509125, 51679117), the Open Research Fund of State Key Laboratory of Geomechanics and Geotechnical Engineering (Z016014), the Jiangxi Provincial Natural Science Foundation (20171BAB206058) and the Young Talent Lift Project of China Association for Science and Technology.

第一作者简介: 蒋水华, 男, 1987 年生, 博士, 讲师, 主要从事岩土工程可靠度与风险分析方面的研究工作。E-mail: sjiaangaa@ncu.edu.cn

通讯作者: 姚池, 男, 1986 年生, 博士, 副教授, 主要从事边坡渗流与稳定性分析方面的研究工作。E-mail: chi.yao@ncu.edu.cn

1 引言

某一特定岩土场地的试验数据、监测资料和观测信息等通常十分有限^[1-2], 导致较难准确获得岩土体参数统计特征, 尽管可通过收集大量的实测数据提高参数统计特征的估计精度, 但这一过程一般需要投入大量的人力物力。相比之下, 贝叶斯方法能够充分利用先验信息如直观试验和观测数据、经验或间接资料作出主观判断, 有效克服试验数据样本量较小的不足^[3-5]。因此, 在场地资料不足的情况下基于贝叶斯方法进行参数统计特征估计和可靠度更新对边坡稳定性设计具有重要的现实意义。

目前许多学者在采用贝叶斯方法估计岩土体参数统计特征及更新岩土可靠度方面进行了大量有益的探索^[6-17], 如张社荣等^[6]基于贝叶斯方法充分利用滑动面以外的地质信息和现场实践经验更新断层带抗剪强度参数。徐军等^[1]结合贝叶斯理论和模糊综合评判方法推断小样本试验数据条件下岩土体参数概率分布。Zhang^[7]基于贝叶斯方法融入基桩荷载试验数据进行基桩可靠度设计。陈炜韬等^[8]运用贝叶斯方法结合具体工程实例优化黏聚力和内摩擦角概率分布。胡巍巍等^[9]基于推广贝叶斯法利用研究场地周围的其他工程数据更新压缩模量并进行地基基础设计。Zhang 等^[10]基于马尔科夫链蒙特卡洛模拟 (MCMCS) 方法研究了土体参数先验概率分布及参数间相关性对参数后验统计特征及边坡治理措施的影响。Freni 等^[11]基于贝叶斯方法研究了未知、信息化较弱和信息化较强这 3 种先验信息条件对水质不确定性分析的影响。Zhang 等^[12]基于特定场地边坡性能信息采用贝叶斯概率方法更新边坡可靠度。Papaioannou 等^[13]考虑弹性模量的空间变异性基于变形监测信息更新板桩墙非线性有限元可靠度。Wang 等^[14]以台湾基隆高速公路第 3 车道滑坡为例, 分别采用 MCMCS 方法和最大似然方法估计内摩擦角和锚索锚固力统计特征, 更新得到的边坡失效概率与工程实际非常吻合。张社荣等^[15]采用贝叶斯方法根据地质勘测新增地质信息和试验数据更新坝基溶蚀区域岩土体参数统计特征。Papaioannou 等^[16]进而基于内摩擦角试验数据更新浅基础承载力可靠度。

尽管目前在岩土体参数估计和可靠度更新研究方面取得了一定的进展, 但关于岩土体参数先验信息如概率分布和似然函数模型对边坡可靠度更新的影响研究远远不够, 确定参数先验信息时通常假定参数服从正态或对数正态分布^[1, 8, 11, 18], 似然函数大

多为多维正态或多维对数正态分布^[10], 然而正态和对数正态分布用于表征参数先验信息的合理性有待进一步验证; 其次, 大多数情况下基于贝叶斯方法估计岩土体参数统计特征没有解析解, 需通过数值模拟产生后验样本进而估计参数统计特征, 在此基础上再更新边坡可靠度, 然而常用的 MCMCS 方法存在一定的不足^[4, 10, 14], 计算精度和效率较低, 亟需发展更为有效的边坡可靠度更新方法; 最后, 试验样本量和先验信息类型 (如信息化较强和较弱的先验信息) 对边坡可靠度更新结果 (如参数均值、标准差和更新的失效概率) 的影响研究也不够深入, 在此基础上如何有效降低参数先验信息对边坡可靠度更新的影响程度同样值得探讨。

为有效估计岩土体参数统计特征和更新边坡失效概率, 本文提出了基于结构可靠度方法和贝叶斯更新 (Bayesian updating with structural reliability methods, BUS) 的边坡可靠度更新方法, 并建议了一种适应性计算 BUS 方法中参数 d 的方法。最后以融入直剪试验数据更新无限长边坡可靠度为例验证了提出方法的有效性, 同时系统探讨了岩土体参数先验信息如试验样本量、概率分布和似然函数模型对边坡可靠度更新的影响规律。

2 边坡可靠度更新的 BUS 方法

某一特定场地的岩土体参数普遍存在一定的物理不确定性、统计不确定性和测量不确定性等^[3], 为此常融入场地试验数据、监测资料和观测信息等降低岩土体参数不确定性, 这一过程主要通过估计的参数后验统计特征如均值、标准差和概率分布以及更新的边坡失效概率体现出来。根据贝叶斯理论, 参数后验概率密度函数可以由下式计算:

$$f_X''(\mathbf{X}) = aL(\mathbf{X})f_X'(\mathbf{X}) \quad (1)$$

式中: $\mathbf{X}$ 为原始空间输入随机向量, $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, n 为随机变量数目; $f_X'(\mathbf{X})$ 和 $f_X''(\mathbf{X})$ 分别为 $\mathbf{X}$ 的先验与后验联合概率密度函数; $L(\mathbf{X})$ 为似然函数, 表示已知试验数据、监测资料和观测信息等条件下参数 $\mathbf{X}$ 发生的概率; a 为比例常数, 用于确保 $f_X''(\mathbf{X})$ 在整个区间上的积分为 1, $a = 1/\int_{-\infty}^{\infty} L(\mathbf{X})f_X'(\mathbf{X})d\mathbf{X}$ 。当先验概率密度函数和似然函数为一对共轭函数, 则 $f_X''(\mathbf{X})$ 有解析表达式^[3]。假如参数 X_1 的均值 μ_{X_1} 的概率分布和似然函数均为正态分布并是一对共轭函数时, 更新的后验概率分布仍为正态分布并且其参数有解析解^[3, 7, 15], 均值 $\mu_{\mu_{X_1}}''$ 和标准差 $\sigma_{\mu_{X_1}}''$ 分别为

$$\left. \begin{aligned} \mu''_{\mu_{X_1}} &= \frac{\mu'_{\mu_{X_1}} (\sigma_{X_1}^2/n_d) + \sigma'^2_{\mu_{X_1}} \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{n_d} X_1^i}{\sigma_{X_1}^2/n_d + \sigma'^2_{\mu_{X_1}}} \\ \sigma''_{\mu_{X_1}} &= \sqrt{\frac{\sigma'^2_{\mu_{X_1}} (\sigma_{X_1}^2/n_d)}{\sigma_{X_1}^2/n_d + \sigma'^2_{\mu_{X_1}}}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中： σ_{X_1} 为 X_1 的标准差； $\mu'_{\mu_{X_1}}$ 和 $\sigma'_{\mu_{X_1}}$ 分别为 μ_{X_1} 的先验均值和标准差； n_d 为试验样本量； X_1^i 表示参数 X_1 的第 i 组试验数据，然后基于参数后验统计特征（均值、标准差和概率分布）便可进行边坡可靠度分析。然而绝大多数情况下 $f_X''(\mathbf{X})$ 没有解析解，只能通过数值模拟产生后验样本，进而统计分析获得近似的 $f_X''(\mathbf{X})$ 。MCMCS 方法常用于数值模拟 $f_X''(\mathbf{X})$ 并求解可靠度更新问题^[10, 14]，但该方法存在如下 3 个关键问题^[4]：① 难以确定到底需要模拟多少组样本才能保证马尔科夫链收敛于精确解；② 马尔科夫链前期有一段较长的波动段，极大地影响了 MCMCS 方法的计算精度与效率；③ MCMCS 方法的计算量会随变量数目的增加而急剧增大，该方法对于考虑参数空间变异性的高维可靠度更新问题几乎无能为力。因此，为有效估计岩土体参数统计特征和更新边坡失效概率，本文提出采用基于 BUS 的边坡可靠度更新方法。

2.1 参数统计特征估计

BUS 方法由 Straub 等^[19]于 2015 年提出，该方法只需确定一个与似然函数相关的参数 d ，便可有效地将贝叶斯更新理论与结构可靠度方法（如一阶可靠度方法、子集模拟等）有机结合，目前已在岩土和结构工程中得到了应用^[19]。为建立贝叶斯更新和结构可靠度分析之间的桥梁关系，需定义一个新的失效区域 Ω_X ，

$$\Omega_X = \{H(\mathbf{X}_+) = p - dL(\mathbf{X}) \leq 0\} \quad (3)$$

式中： p 为 $[0, 1]$ 区间均匀分布随机变量，进而定义扩展随机向量 $\mathbf{X}_+ = [p, \mathbf{X}]^T$ ； d 为对于所有的 $\mathbf{X}$ 而言总有 $dL(\mathbf{X}) \leq 1.0$ 的参数。为了便于在贝叶斯更新过程中条件样本的产生和可靠度的更新计算，常将失效区域 Ω_X 由原始空间转换到独立标准正态空间，得到相应的失效区域为

$$\Omega_U = \{H(\mathbf{U}_+) = U_0 - \Phi^{-1}\{dL[\mathbf{T}(\mathbf{U})]\} \leq 0\} \quad (4)$$

式中： $U_0 = \Phi^{-1}(p)$ ， $\Phi^{-1}(\cdot)$ 为标准正态变量累积分布函数的逆函数； $\mathbf{U}$ 为独立标准正态空间输入随机向量， $\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n)$ ，同样有 $\mathbf{U}_+ = [U_0, \mathbf{U}]^T$ ； $\mathbf{X} = \mathbf{T}(\mathbf{U})$ 对于随机变量而言， $\mathbf{T}(\cdot)$ 可为 Nataf 等概

率变换函数^[20]，而对于随机场而言， $\mathbf{T}(\cdot)$ 则为某种随机场离散方法。在此基础上，参数统计特征估计便可转换为求解结构可靠度问题，为有效解决低概率水平可靠度问题，一般选用子集模拟方法^[21-22]进行可靠度分析。基于子集模拟的 BUS 方法计算步骤与子集模拟方法大体相似，不同的是 BUS 方法所关注的失效区域为 $Z = \Omega_U = \{H(\mathbf{U}_+) = U_0 - \Phi^{-1}\{dL[\mathbf{T}(U_1, \dots, U_n)]\} \leq b\}$ ，而子集模拟方法直接关注边坡失效区域 $F = \Omega_F = \{G(\mathbf{X}) = FS(\mathbf{X}) - 1.0 < g\}$ ，其中 b 和 g 均为失效临界阈值。BUS 方法同样将一个较小概率失效事件 Z 发生的概率表达为一系列较大的中间失效事件条件概率的乘积， Z 发生的概率即为接受概率 p_{acc} ，计算公式为

$$p_{acc} = P(Z) = P[H(\mathbf{U}_+) \leq b] = P(Z_1) \prod_{i=2}^m P(Z_i | Z_{i-1}) \quad (5)$$

式中： $P(Z_1)$ 为 Z_1 的发生概率； $P(Z_i | Z_{i-1})$ ， $i = 2, 3, \dots, m$ 为在 Z_{i-1} 发生的条件下 Z_i 发生的概率，其中 m 为子集模拟中为达到失效区域所需模拟的层数。类似地，通过产生中间失效事件的条件样本，并估计它们所对应的条件概率，使之逐步逼近于目标失效区域 Z 。其中关键一步是对所产生的随机样本进行统计分析，确定与失效事件 $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ 相对应的临界阈值 $b_1, b_2, \dots, b_m$ ，使得 $P(Z_1)$ 和 $P(Z_i | Z_{i-1})$ ， $i = 2, 3, \dots, m$ 均等于条件概率 p_0 。另外基于子集模拟的 BUS 方法重要一步是根据似然函数确定式 (3) 中参数 d ，但对于大多似然函数而言， d 值不能解析计算^[19]，为保证计算精度，本文建议了一种适应性计算 BUS 方法中参数 d 的方法， d_i 计算表达式为

$$d_i = \frac{1}{\max_{k=1,2,\dots,N_1} L(\mathbf{X}_{i,k})}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

式中： N_1 为子集模拟每层所需的样本数目。基于子集模拟的 BUS 方法计算步骤主要如下：

(1) 在第 1 层产生 N_1 组 $(n+1)$ 维蒙特卡洛模拟 (MCS) 样本点，通过等概率变换^[20]获得 N_1 组原始空间土体参数特性值 $\mathbf{X}$ ，计算对应的 N_1 个似然函数值 $L(\mathbf{X})$ ，并根据式 (6) 得到 d_1 值。然后根据式 (4) 获得 N_1 个功能函数值 $H(\mathbf{U}_+)$ ，并将 N_1 个 $H(\mathbf{U}_+)$ 值按照升序排列，取第 $(p_0 N_1 + 1)$ 个 $H(\mathbf{U}_+)$ 为阈值 b_1 ，这样有 $P(Z_1) = P\{H(\mathbf{U}_+) < b_1\}$ 等于条件概率 p_0 。

(2) 将从上一步中提取的 $p_0 N_1$ 组 $H(\mathbf{U}_+)$ 值小于 b_1 的随机样本视为种子样本，采用改进 Metropolis 算法^[21]产生另外的 $(1-p_0)N_1$ 组条件样本，其中目标概率分布选用中心点为当前样本，上、下限宽度为

2 倍变量标准差的均匀分布^[21]。同样通过等概率变换获得这 $(1-p_0)N_1$ 组随机样本对应的原始空间土体参数值, 连同从上一步中提取的 p_0N_1 组种子样本一起, 重新计算 N_1 个 $L(\mathbf{X})$ 值并得到参数 d_2 。同样可获得 N_1 个新的 $H(\mathbf{U}_+)$ 值并按照升序排列, 显然它们均小于 b_1 。类似地, 取第 (p_0N_1+1) 个 $H(\mathbf{U}_+)$ 值为阈值 b_2 , 从中也有 p_0N_1 组随机样本的 $H(\mathbf{U}_+)$ 值小于 b_2 , 即 $P(Z_2|Z_1) = P\{H(\mathbf{U}_+) < b_2 | H(\mathbf{U}_+) < b_1\} = p_0$ 。

(3) 对步骤(2)重复计算 $m-2$ 次, 依次可确定参数 $d_3, \dots, d_m$ 和阈值 $b_3, \dots, b_m$, 并定义失效事件 $Z_3, \dots, Z_m$ 。假如随机样本抽样空间在第 m 层达到失效区域 Z , 子集模拟计算终止。同样将失效区域 Z_m 中的 N_1 组随机样本所对应的 $H(\mathbf{U}_+)$ 值按升序排列, 取第 (p_0N_1+1) 个 $H(\mathbf{U}_+)$ 值为阈值 b_m , 然而与前 $m-1$ 个阈值均大于 0 不同的是, $b_m \leq 0$ 。统计第 m 层中 $H(\mathbf{U}_+) < 0$ 的失效样本数目, 计为 N_f , 显然 $N_f \geq p_0N_1$ 。

(4) 为准确估计参数后验统计特征, 再次将从第 m 层中提取的 N_f 组失效样本作为种子样本, 采用改进 Metropolis 算法产生 K 组失效样本, 本文为保证计算精度和效率, 取 $K=10N_f$, 最后基于这 K 组失效样本估计参数后验统计特征。

综上, BUS 方法中子集模拟共需要执行 m 层随机模拟, 包括第 1 层直接 MCS 模拟和其余 $m-1$ 层基于改进 Metropolis 算法的条件模拟, 对应的 m 个中间失效事件为 $Z_i = \{H(\mathbf{U}_+) < b_i, i=1, 2, \dots, m\}$, $Z_1 \supset Z_2 \supset \dots \supset Z_{m-1} \supset Z_m$ 及其临界阈值分别为 $b_1 > b_2 > \dots > b_{m-1} > 0 \geq b_m$, 相应的概率分别为 $P(Z_1) = p_0$, $P(Z_i|Z_{i-1}) = p_0$, $i=2, \dots, m-1$, $P(Z_m|Z_{m-1}) = N_f/N_1$, 代入式(5)可进一步得到接受概率为

$$p_{\text{acc}} = p_0^{m-1} \frac{N_f}{N_1} \quad (7)$$

上述过程共需调用似然函数计算 N_{sim} 次:

$$N_{\text{sim}} = N_1 + (m-1)(1-p_0)N_1 + 9N_f \quad (8)$$

由式(7)可知, $m \approx \lg p_{\text{acc}} / \lg p_0$, 即似然函数的调用次数与接受概率的大小成反比, 如果接受概率水平较低, 则似然函数的调用次数较大。此外, 由于似然函数会通过式(6)影响 d 值的计算, 从而对 BUS 方法的计算精度与效率产生间接的影响, 故必须认真加以确定。

2.2 边坡失效概率更新

如果可获得较为完备的岩土体参数先验信息如联合概率密度函数等, 边坡失效概率可直接积分得

到。即使只能获得参数边缘概率分布和互相关性, 也可采用最为稳健的直接 MCS 方法计算:

$$P(F) = \int_{\mathbf{X} \in \Omega_F} f'_X(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{MCS}}} I[G(\mathbf{X}^k) < 0]}{N_{\text{MCS}}} \quad (9)$$

式中: $F = \Omega_F = \{G(\mathbf{X}) = FS(\mathbf{X}) - 1.0 < 0\}$ 为边坡失稳区域; $f'_X(\mathbf{X})$ 为 $\mathbf{X}$ 的先验联合概率密度函数; N_{MCS} 为 MCS 样本数目; $I(\cdot)$ 为指示性函数, 如果对于某一组样本 $\mathbf{X}$ 有 $G(\mathbf{X}) < 0$, 则 $I[G(\mathbf{X}) < 0] = 1$, 否则等于 0。如果边坡失效概率水平较低, 直接用 MCS 方法的计算量较大, 此时为提高计算效率可借助子集模拟方法计算失效概率。类似地, 当融入特定场地试验数据、监测资料和观测信息等更新岩土体参数统计特征后, 基于更新的参数统计特征同样可以采用直接 MCS 方法计算边坡失效概率:

$$P(F|Z) = \frac{P(F \cap Z)}{P(Z)} = \frac{\int_{\Omega_F \cap \Omega_Z} f'_X(\mathbf{X}_+) d\mathbf{X}_+}{\int_{\Omega_Z} f'_X(\mathbf{X}_+) d\mathbf{X}_+} = \frac{\sum_{k=1}^{N_{\text{MCS}}} I[G(\mathbf{X}^k) < 0] I[(\mathbf{X}^k, p^k) \in \Omega_Z]}{\sum_{k=1}^{N_{\text{MCS}}} I[(\mathbf{X}^k, p^k) \in \Omega_Z]} \quad (10)$$

式中: Z 表示融合试验数据、监测资料或观测信息等先验知识而定义的广义失效区域, Z 等于 Ω_X 或 Ω_U ; $f'_X(\mathbf{X}_+)$ 为 $\mathbf{X}_+$ 的先验联合概率密度函数; $I(\cdot)$ 为指示性函数, 如果某一组样本 $\mathbf{X}$ 和 p 位于式(3)所示失效区域 Ω_X 内, 则 $I[(\mathbf{X}, p) \in \Omega_X] = 1$, 否则等于 0。融入场地信息后更新的边坡失效概率水平通常较低(如小于 10^{-6}), 此时直接 MCS 方法的计算量非常可观。为提高计算效率, 本文采用子集模拟方法分别将 $F \cap Z$ 和 Z 作为目标失效区域计算式(10)的分子和分母, 然后相除得到更新的边坡失效概率。需要指出的是, 式(10)的分母即是接受概率 p_{acc} , 在参数统计特征估计中已由式(7)计算得到, 直接使用即可。下面以融入直剪试验数据更新无限长边坡可靠度为例验证提出方法的有效性, 并探讨先验信息(如样本量、概率分布和似然函数模型)对边坡可靠度更新结果(如参数后验均值、标准差和更新的失效概率)的影响。

3 无限长边坡可靠度更新

无限长边坡模型^[2, 23-25]常用于浅层滑坡稳定性评价中, 是边坡稳定性分析的一种实用简化模型。对于图 1 所示的无限长边坡模型, 在忽略孔隙水压力的情况下, 边坡安全系数 F_S 的计算公式为

$$F_s = \frac{c + \gamma H \cos^2 \beta \tan \varphi}{\gamma H \sin \beta \cos \beta} \quad (11)$$

式中： H 为潜在滑动面以上土层厚度； β 为边坡倾角； γ 为粉土重度； c 和 φ 为潜在滑动面上粉土的有效黏聚力和内摩擦角。由于边坡几何参数 H 、 β 以及 γ 的变异性一般较小，可以将其视为确定量，取值分别为 $H = 5 \text{ m}$ ， $\beta = 21.36^\circ$ 和 $\gamma = 19.8 \text{ kN/m}^3$ 。

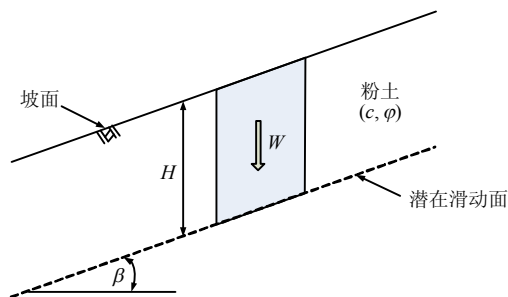


图 1 无限长边坡模型

Fig.1 An infinite slope model

综上，式 (11) 中只有 c 和 φ 为不确定性参数，下面采用文献[26]提供的无限长边坡周围不同地点处的 20 组粉土直剪试验数据如表 1 所示，更新无限长边坡可靠度。由于 Oberguggenberger 等^[26]进行每组粉土直剪试验时，均保持剪切速率不变，并有 $c = 0$ ，进而边坡可靠度分析中只需考虑粉土内摩擦角 φ 的不确定性，功能函数可简化为

$$G(\varphi) = \frac{\tan \varphi}{\tan \beta} - 1.0 \quad (12)$$

表 1 20 组内摩擦角直剪试验数据

Table 1 Direct shear test data of friction angle

序号	内摩擦角 $\varphi / (^\circ)$	序号	内摩擦角 $\varphi / (^\circ)$
1	25.6	11	23.2
2	25.5	12	25.0
3	24.0	13	22.0
4	26.0	14	24.0
5	24.1	15	24.9
6	24.0	16	30.0
7	28.5	17	27.0
8	25.3	18	24.4
9	23.4	19	24.3
10	26.5	20	29.5

根据文献[16,27]可知，当土体特性波动范围为 0，不仅可将土体参数模拟为剧烈变化的随机变量模型，而且可将参数均值视作特征值进行边坡可靠度更新分析，即本文边坡可靠度更新时可采用 φ 的均值 μ_φ 代替式 (12) 的 φ 计算。假设粉土内摩擦角的均值 μ_φ 在 25° 和 31° 范围内变化，且这个下限和上

限值分别对应于 μ_φ 的 10% 和 90% 分位数，并且 μ_φ 服从正态分布，可得其先验均值 μ'_{μ_φ} 和标准差 σ'_{μ_φ} 分别为 28° 和 2.341° ，根据式 (12) 便可计算得到无限长边坡先验失效概率为 2.28×10^{-3} 。在此基础上，融入内摩擦角直剪试验数据更新 μ_φ 概率分布并计算更新的边坡失效概率。

建立准确的似然函数模型是贝叶斯更新分析的关键，通常每个样本对应的似然函数与已知 μ_φ 条件下样本 φ_i 发生的概率成一定的比例关系^[3, 16]，即

$$L_i(\mu_\varphi) \propto f(\varphi_i | \mu_\varphi) \quad (13)$$

式中： φ_i 为 φ 的第 i 组试验数据。在已知 μ_φ 条件下，用 φ_i 代替 $f(\varphi)$ 中的 φ 便可得到似然函数 $L_i(\mu_\varphi)$ 。假设所有试验样本都相互独立，即可得到融入试验数据的多维联合分布似然函数为

$$L(\mu_\varphi) = \prod_{i=1}^{n_d} f(\varphi_i | \mu_\varphi) \quad (14)$$

式中： n_d 为内摩擦角 φ 直剪试验样本量。如果 φ 服从均值为 μ_φ 和标准差为 σ_φ 的正态分布，则似然函数为

$$L(\mu_\varphi) = \frac{1}{(\sigma_\varphi \sqrt{2\pi})^{n_d}} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n_d} \left(\frac{\varphi_i - \mu_\varphi}{\sigma_\varphi} \right)^2 \right] \quad (15)$$

为验证基于 BUS 边坡可靠度更新方法的有效性，首先假设 μ_φ 和 φ 均服从正态分布，相应的似然函数为多维联合正态分布，如式 (15) 所示，此时更新的 μ_φ 仍服从正态分布，不仅可由式 (2) 得到 μ_φ 的后验均值 μ''_{μ_φ} 和标准差 σ''_{μ_φ} 的解析解，而且能获得更新的边坡失效概率精确解用于验证 BUS 方法。另外为调查子集模拟中每层所需随机样本数目 N_l 对边坡可靠度更新的影响， N_l 分别取为 500、1 000、3 000 和 5 000，条件概率 p_0 取常用的 0.1。表 2 给出了内摩擦角标准差 $\sigma_\varphi = 3^\circ$ 时基于表 1 中前 3 组试验样本 ($n_d = 3$)，由 BUS 方法计算的后验均值、标准差和更新的边坡失效概率及其精确解。由表 2 可知，每层随机样本数目 N_l 对边坡可靠度更新结果有一定的影响，但随着 N_l 数目的增加，不仅 μ''_{μ_φ} 和 σ''_{μ_φ} 逐渐收敛与精确解保持一致，而且更新的失效概率 $P(F|Z)$ 也逐渐收敛于精确解。如当 $N_l = 500$ 、1 000、3 000 和 5 000 时，计算的 $P(F|Z)$ 分别为 1.71×10^{-4} 、 2.68×10^{-4} 、 4.18×10^{-4} 和 3.58×10^{-4} ，与精确解 3.47×10^{-4} 相比，相对误差绝对值分别为 50.7%、22.8%、20.5% 和 3.2%。显然 N_l 取常用的 500 不能得到满意的计算结果，而 N_l 取 5 000 时 BUS 方法的计算精度较高。这主要因为由于子集模拟分别

计算的 $P(F \cap Z)$ 和 $P(Z)$ 的变异系数会随着 N_1 的增加而减小^[21-22], 进而 $P(F|Z)$ 的计算精度随着 N_1 的增加而增加。图 2 进一步比较了更新的边坡失效概率随 σ_ϕ 的变化关系, 为说明 σ_ϕ 对可靠度更新的影响, 图中 σ_ϕ 分别取为 2.0° 、 2.5° 、 3.0° 、 3.5° 、 4.0° 、 4.5° 和 5.0° , 边坡先验失效概率也列入图中。同样随着 N_1 数目的增加, 更新的失效概率逐渐收敛于精确解, BUS($N_1=5\ 000$) 方法计算精度较高, 而 BUS($N_1=500$) 方法存在较大的误差。当然进一步增大 N_1 , BUS 方法的计算精度还会进一步提高, 但相应的计算效率会降低, 为综合考虑计算精度和效率, 本文基于 BUS 方法进行边坡可靠度更新计算时 N_1 取 5 000。此外, σ_ϕ 对更新的边坡失效概率也有着重要的影响。如当 σ_ϕ 由 2° 变化为 5° , 由 BUS 方法更新的失效概率由 1.7×10^{-5} 增大到 1.3×10^{-3} , 增大了近 2 个数量级。与先验失效概率相比, 融入内摩擦角直剪试验数据后边坡失效概率尤其在 σ_ϕ 较小处有较大幅度的降低。

表 2 $\sigma_\phi = 3^\circ$ 时不同方法计算结果的比较

Table 2 Comparison of the results obtained from different approaches for $\sigma_\phi = 3^\circ$

不同方法	$\mu_{\mu_\phi}'' / (^\circ)$	$\sigma_{\mu_\phi}'' / (^\circ)$	$P(F Z)$
BUS($N_1=500$)	26.08	1.43	1.71×10^{-4}
BUS($N_1=1\ 000$)	26.10	1.37	2.68×10^{-4}
BUS($N_1=3\ 000$)	26.14	1.38	4.18×10^{-4}
BUS($N_1=5\ 000$)	26.06	1.40	3.58×10^{-4}
精确解	26.08	1.39	3.47×10^{-4}

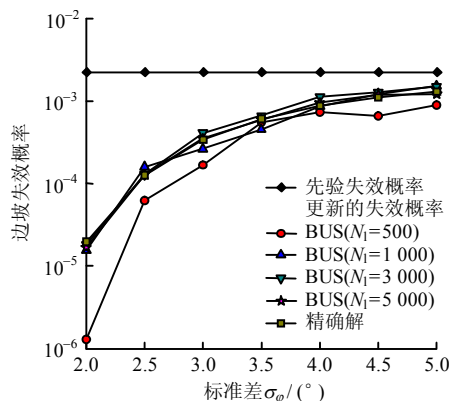


图 2 边坡失效概率随内摩擦角标准差的变化关系
Fig.2 Variations of the probability of failure with the standard deviation of friction angle

要获得某一特定岩土场地大量的试验数据、监测资料和观测信息等, 需要投入大量的人力物力, 为节省工程投资成本, 通常在满足工程安全设计的前提下尽可能只进行一些代表性的试验。这样可能引起如下问题: 到底需要进行多少组代表性的试验

才可满足工程安全设计要求? 试验样本量对参数后验统计特征的估计有着怎样的影响? 为回答以上问题, 下面进一步探讨试验样本量对边坡可靠度更新的影响。表 3 比较了 $\sigma_\phi = 3^\circ$ 时以不同试验样本量计算的后验均值、标准差和更新的失效概率及其精确解。由表可知, 随着试验样本量的增加, μ_{μ_ϕ}'' 和 σ_{μ_ϕ}'' 均有所减小, 并且更新的失效概率也有一定程度的降低。当试验样本量由 1 组增加至 5 组时, μ_{μ_ϕ}'' 和 σ_{μ_ϕ}'' 分别由 27.09° 和 1.86° 减小至 25.75° 和 1.17° , $P(F|Z)$ 由 9.43×10^{-4} 降低至 7.31×10^{-5} 。表明试验样本量越大, 对特定岩土场地信息掌握的越详细, 对岩土体参数统计特征估计的越准确, 进而获得的边坡参数总的不确定性也越小, 边坡稳定性水平越高。此外可见 BUS($N_1=5\ 000$) 方法计算结果与精确解几乎一致, 进一步验证了提出方法的有效性。

表 3 $\sigma_\phi = 3^\circ$ 时不同试验样本量计算结果的比较

Table 3 Comparison of the results obtained using different amounts of test data for $\sigma_\phi = 3^\circ$

试验样本	不同方法	$\mu_{\mu_\phi}'' / (^\circ)$	$\sigma_{\mu_\phi}'' / (^\circ)$	$P(F Z)$
表 1 中前 1 组	BUS($N_1=5\ 000$)	27.09	1.86	9.43×10^{-4}
	精确解	27.09	1.85	9.49×10^{-4}
表 1 中前 3 组	BUS($N_1=5\ 000$)	26.07	1.40	3.58×10^{-4}
	精确解	26.08	1.39	3.47×10^{-4}
表 1 中前 5 组	BUS($N_1=5\ 000$)	25.75	1.17	7.31×10^{-5}
	精确解	25.77	1.16	7.53×10^{-5}

图 3 进一步给出了由 BUS($N_1=5\ 000$) 方法更新的边坡失效概率随 σ_ϕ 的变化关系曲线。由图可知, 当 σ_ϕ 较小时, 试验样本量越大, 获得的边坡参数总的不确定性越小, 边坡失效概率降低的越明显, 相应的边坡稳定性水平越高。但当样本量增加到一定程度时, 更新的边坡失效概率趋于收敛, 差别较小。如图 3 中基于表 1 中的前 7 组和前 9 组内摩擦角试

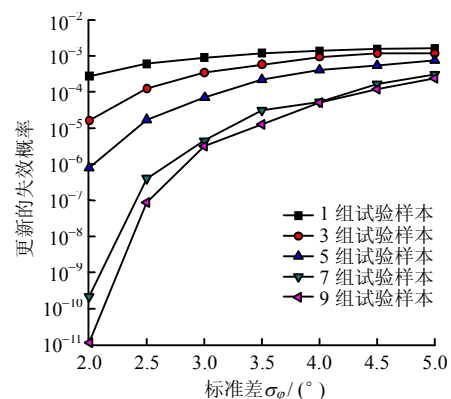


图 3 试验样本量对更新的边坡失效概率的影响
Fig.3 Effect of size of test data on the updated probability of slope failure

验样本更新的边坡失效概率水平不仅非常低（小于 10^{-9} ），而且相互间差别不大。换言之，此时为节省工程造价进行 7 次代表性的粉土直剪试验即可。另外文中所研究的内摩擦角变异系数 δ_ϕ 约为 0.07~0.20，这与《岩土工程勘察规范》^[28]中当变异系数 $\delta_\phi < 0.3$ 时试验次数为 6 组的结论基本吻合。需要指出的是，随着更新的边坡失效概率水平的进一步降低（如小于 10^{-9} ），基于 $N_1=5\,000$ 的 BUS 方法的计算精度可能不够，为保证计算精度，需进一步增加每层样本数目 N_1 。

岩土工程统计分析中一般采用正态、对数正态、Beta 和极值 I 型分布拟合或模拟岩土体参数概率分布特征^[1, 8, 11, 18, 29-32]。其中常用的正态分布和对数正态分布均属于中心极限分布系列，可表示大量不确定性因素相乘的极限分布形式。相比于正态分布，对数正态分布不仅能保证土体参数不可能取到负值，而且偏向于小值，理论上更适合于表征土体参数的概率分布特征^[11, 18]。Beta 分布常用于描述随机变量在某一范围内上、下变动^[30]。极值 I 型分布属

于极值分布系列，可表示在随机变量的极值分析中当母体分布尾部特征为指数渐减时，其渐进分布为极值 I 型分布^[29, 31]。表 4 给出了这 4 种常用的概率密度函数 $f(X)$ 及计算参数 q 和 r 与均值 μ_X 和标准差 σ_X 的转换关系。下面探讨用于表征 μ_ϕ 的这 4 种概率分布（正态、对数正态、Beta 和极值 I 型分布）对边坡可靠度更新的影响，假设似然函数仍为多维联合正态分布，并仍保持 μ_ϕ 的 10% 和 90% 分位数分别为 25° 和 31° 不变。需要说明的是 μ_ϕ 除服从正态分布外，服从其他分布时后验参数统计特征均没有解析解，只能通过数值求解。表 5 给出了这 4 种概率分布的均值 μ'_{μ_ϕ} 和标准差 σ'_{μ_ϕ} 及 $\sigma_\phi = 3^\circ$ 时基于表 1 中前 3 组试验样本更新的 μ''_{μ_ϕ} 和 σ''_{μ_ϕ} ，其中 Beta 分布的上限 b 和下限 a 分别取参数均值加和减 3 倍的标准差。图 4 给出了由 BUS($N_1=5\,000$) 方法更新的边坡失效概率随 σ_ϕ 的变化关系曲线。由图可知，参数先验概率分布对更新的边坡失效概率具有重要的影响。尽管由正态和对数正态分布更新的边坡失效概率相互之间，以及由 Beta 和极值 I 值分布更新

表 4 岩土工程统计分析中常用 4 种概率分布

Table 4 Common marginal probability distributions for geostatistical analysis

分布函数类型	概率密度函数 $f(X)$ (X 为 μ_ϕ 或 ϕ)	参数 q 和 r 与 μ_X 和 σ_X 的转换关系
正态分布	$f(X) = \frac{1}{r\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{X-q}{r}\right)^2\right]$	$\begin{cases} q = \mu_X \\ r = \sigma_X \end{cases}$
对数正态分布	$f(X) = \frac{1}{Xr\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(X)-q}{r}\right)^2\right]$	$\begin{cases} q = \ln \mu_X - r^2/2 \\ r = \sqrt{\ln[1 + (\sigma_X/\mu_X)^2]} \end{cases}$
Beta 分布	$f(X) = \frac{1}{B(q,r)} (X-a)^{q-1} (b-X)^{r-1}, \quad (a \leq X \leq b)$ $B(q,r) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)} = \int_0^1 t^{q-1} (1-t)^{r-1} dt$	$\begin{cases} q = \left[\frac{(\mu_X - a)(b - \mu_X)}{\sigma_X^2} - 1 \right] \left[\frac{\mu_X - a}{b - a} \right] \\ r = \left[\frac{(\mu_X - a)(b - \mu_X)}{\sigma_X^2} - 1 \right] \left[\frac{b - \mu_X}{b - a} \right] \end{cases}$
极值 I 型分布	$f(X) = r \exp[-r(X-q)] \exp\{-\exp[-r(X-q)]\}$	$\begin{cases} q = \mu_X - 0.577 \, 2/r \\ r = \pi/(\sqrt{6}\sigma_X) \end{cases}$

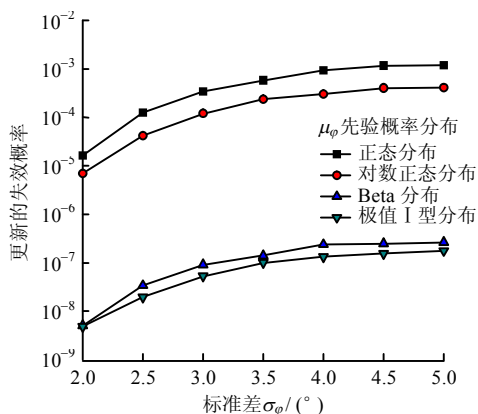


图 4 概率分布对更新的边坡失效概率的影响

Fig.4 Effect of probability distribution of μ_ϕ on the updated probability of failure

的失效概率相互之间差别均较小，但由前二者更新的边坡失效概率要比由后二者更新的失效概率大 3 个数量级以上。可见基于常用的正态和对数正态分布的边坡可靠度更新结果偏于保守，因此，在工程勘察与可行性设计阶段要尽可能准确确定岩土体参数的概率分布。

岩土体参数先验信息大体可以分为两类^[5, 11]：

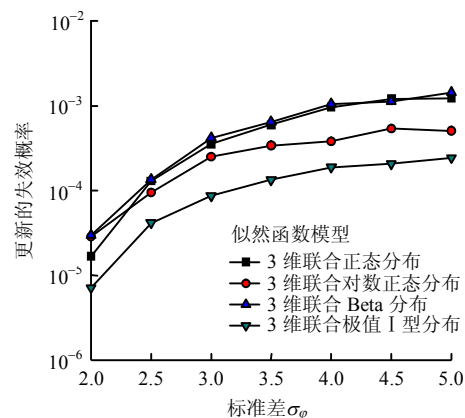
① 信息化较强的先验信息，即可根据大量试验数据、监测资料和观测信息等场地信息较准确地确定岩土体参数的统计特征（均值、标准差和概率分布），如基本确定 μ_ϕ 服从正态或对数正态分布等；② 信息化较弱的先验信息，即根据不同岩土场地工程类比信息和专家经验判断只能获得较为模糊的参数先

验信息, 如仅知道某特定场地岩土体参数的大致变化范围, 假定 μ_φ 服从均匀分布。下面分别比较上述 2 种先验信息条件下似然函数模型对边坡可靠度更新的影响。对于信息化较强的先验信息, 假如 μ_φ 服从正态分布, 均值和标准差如表 5 所示; 对于信息化较弱的先验信息, 假设 μ_φ 服从均匀分布, μ_φ 的变化范围根据文献[26]取为 $[20^\circ, 32^\circ]$ 。当内摩擦角 φ 分别服从表 4 中正态、对数正态、Beta 和极值 I 型分布时, 对应的似然函数模型便分别为多维联合正态、多维联合对数正态、多维联合 Beta 和多维联合极值 I 型分布。同样, 当且仅当 μ_φ 服从正态分布且似然函数为多维联合正态分布时, 后验参数统计特征才有解析解, 对于其他先验信息只能通过数值求解。图 5 比较了上述 2 种先验信息条件下基于表 1 中前 3 组试验样本更新的边坡失效概率随 σ_φ 的变化关系。由图可知, 似然函数模型对边坡可靠度更新也有一定的影响, 但与先验概率分布对边坡可靠度更新结果的影响相比影响程度相对较小。由三维联合正态和联合 Beta 分布似然函数更新的边坡失效概率最大, 且相互间差别较小, 由三维联合极值 I 型分布似然函数更新的失效概率最小, 由三维联合对数正态分布似然函数更新的失效概率居中。并且基于这 4 种不同似然函数模型更新的失效概率的差别随着 σ_φ 的增大而增加, 最大处相差近 1 个数量级。图 5(a)要比图 5(b)更新的边坡失效概率小 2 个数量级, 同样说明对参数先验信息掌握的准确程度会间接影响更新的边坡失效概率, 对参数先验信息掌握得越详细, 参数统计特征估计得越准确, 参数总的不确定性便越小, 更新的边坡失效概率也越低。此外, 与信息化较强先验信息情况下似然函数模型对更新的边坡失效概率影响相比, 信息化较弱的先验信息情况下似然函数模型的影响更小。因此, 信息化较弱的先验信息条件下对似然函数模型的选择没有太严格的要求, 尽可能选择可与先验概率分布构成共轭函数的似然函数模型, 使得参数后验统计特征和失效概率的计算有解析解, 从而可减小数值模拟所带来的误差, 保证计算结果的可靠性。

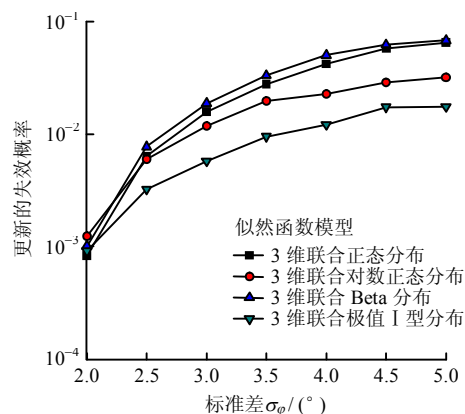
表 5 4 种概率分布的均值与标准差及 $\sigma_\varphi = 3^\circ$ 时后验均值与标准差

Table 5 Comparison of mean value and standard deviation for four probability distributions at $\sigma_\varphi = 3^\circ$

分布函数类型	$\mu'_\varphi / (^\circ)$	$\sigma'_\varphi / (^\circ)$	$\mu''_\varphi / (^\circ)$	$\sigma''_\varphi / (^\circ)$
正态分布	28.000	2.341	26.056	1.404
对数正态分布	27.937	2.349	26.037	1.344
Beta 分布	28.000	2.258	26.025	1.355
极值 I 型分布	27.745	2.495	26.000	1.171



(a) 正态分布



(b) 均匀分布

图 5 似然函数模型对更新的边坡失效概率的影响

Fig.5 Effect of likelihood functions of μ_φ on the updated probability of failure

4 结 论

(1) 本文提出了边坡可靠度更新的 BUS 方法, 并建议了一种适应性计算 BUS 方法中参数 d 的方法。以融入直剪试验数据更新无限长边坡可靠度为例验证了提出方法的有效性, 并系统地探讨了岩土体参数先验信息如试验样本量、概率分布和似然函数模型对边坡可靠度更新计算结果(参数后验均值、标准差以及更新的失效概率)的影响。

(2) BUS 方法能够有效地考虑岩土体参数概率分布和似然函数模型的影响融入各种场地信息估计参数统计特征和更新边坡可靠度, 具有较高的计算精度和效率, 为解决有限样本条件下边坡可靠度更新问题提供了一条有效的途径。BUS 方法每层所需随机样本数目 N_1 对计算结果有一定的影响, 计算精度一般随着 N_1 的增加而增大。

(3) 岩土体参数先验概率分布对边坡可靠度更新结果具有重要的影响, 基于常用的正态和对数正态分布的边坡可靠度更新结果偏于保守, 故在工程

勘察与可行性设计阶段要尽可能准确确定岩土体参数概率分布。相比之下, 似然函数模型对边坡可靠度更新结果的影响相对较小。

(4) 岩土体参数统计特征的估计精度一般随着试验样本量的增加而增大, 但样本量增加到一定程度时, 边坡可靠度更新结果的变化不大。此外, 与信息化较强先验信息情况下似然函数模型对更新的边坡失效概率的影响相比, 信息化较弱先验信息情况下似然函数模型的影响相对较小。

(5) 本文通过基于单变量模型的无限长边坡可靠度更新验证了提出方法的有效性, 因为 BUS 方法最大的优势在于处理高维问题, 故提出方法同样可拓展到分析考虑参数空间变异性的边坡可靠度更新问题。岩土体参数先验信息包括参数间互相关性对考虑参数空间变异性边坡可靠度更新的影响值得进一步研究。

参 考 文 献

- [1] 徐军, 雷用, 郑颖人. 岩土参数概率分布推断的模糊 Bayes 方法探讨[J]. 岩土力学, 2000, 21(4): 394—396.
XU Jun, LEI Yong, ZHENG Ying-ren. The Fuzzy BAYES method to infer distribution of rock parameters[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2000, 21(4): 394—396.
- [2] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 不完备概率信息条件下边坡可靠度分析方法[J]. 岩土工程学报, 2013, 35(6): 1027—1034.
TANG Xiao-song, LI Dian-qing, ZHOU Chuang-bing, et al. Reliability analysis of slopes with incomplete probability information[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2013, 35(6): 1027—1034.
- [3] ANG A H S, TANG W H. Probability concepts in engineering: Emphasis on applications to civil and environmental engineering(2nd edition)[M]. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2007.
- [4] CHING J, WANG J S. Application of the transitional Markov chain Monte Carlo algorithm to probabilistic site characterization[J]. **Engineering Geology**, 2016, 203: 151—167.
- [5] CAO Z J, WANG Y, LI D Q. Quantification of prior knowledge in geotechnical site characterization[J]. **Engineering Geology**, 2016, 203: 107—116.
- [6] 张社荣, 贾世军, 郭怀志. 岩石边坡稳定的可靠度分析[J]. 岩土力学, 1999, 20(2): 57—61.
ZHANG She-rong, JIA Shi-jun, GUO Huai-zhi. Reliability analysis of the rock slope stability[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 1999, 20(2): 57—61.
- [7] ZHANG L M. Reliability verification using proof pile load tests[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2004, 130(11): 1203—1213.
- [8] 陈炜韬, 王玉锁, 王明年, 等. 黏土质隧道围岩抗剪强度参数的概率分布及优化实例[J]. 岩石力学与工程学报, 2006, 25(增刊 2): 3782—3787.
CHEN Wei-tao, WANG Yu-suo, WANG Ming-nian, et al. Probability distribution and optimizing example of shear strength parameters of surrounding rock in cohesive soil tunnel[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2006, 25(Supp.2): 3782—3787.
- [9] 胡巍巍, 潘健. 基于推广贝叶斯法的岩土参数估计及基础设计[J]. 汕头大学学报(自然科学版), 2008, 23(1): 70—76.
HU Wei-wei, PAN Jian. Estimating of the geotechnical parameter based on the extended Bayesian method and designing of the foundation[J]. **Chinese Journal of Shantou University (Natural Science)**, 2008, 23(1): 70—76.
- [10] ZHANG L L, ZHANG J, ZHANG L M, et al. Back analysis of slope failure with Markov chain Monte Carlo simulation[J]. **Computers and Geotechnics**, 2010, 37(7): 905—912.
- [11] FRENI G, MANNINA G. Bayesian approach for uncertainty quantification in water quality modelling: The influence of prior distribution[J]. **Journal of Hydrology**, 2010, 392(1): 31—39.
- [12] ZHANG J, ZHANG L M, TANG W H. Slope reliability analysis considering site-specific performance information[J]. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, 2011, 137(3): 227—238.
- [13] PAPAIOANNOU I, STRAUB D. Reliability updating in geotechnical engineering including spatial variability of soil[J]. **Computers and Geotechnics**, 2012, 42: 44—51.
- [14] WANG L, HWANG J H, LUO Z, et al. Probabilistic back analysis of slope failure—A case study in Taiwan[J]. **Computers and Geotechnics**, 2013, 51: 12—23.
- [15] 张社荣, 王超, 孙博. Bayes 约束随机场下坝基溶蚀区

- 随机模拟方法及其影响分析[J]. 岩土力学, 2013, 34(8): 2337—2346.
- ZHANG She-rong, WANG Chao, SUN Bo. Stochastic simulation and influence analysis of dissolution dam foundation under Bayes constraint random field[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2013, 34(8): 2337—2346.
- [16] PAPAIOANNOU I, STRAUB D. Computing the reliability of shallow foundations with spatially distributed measurements[C]//SCHWECKENDIEK T, VAN TOL A F, PEREBOOM D, et al. Geotechnical Safety and Risk V. [S. l.]: [s. n.], 2015: 958—963. Doi.10.3233/978-1-61499-580-7-958.
- [17] 张蕾, 李典庆, 唐小松, 等. 基于贝叶斯理论的抗剪强度参数最优 Copula 函数识别[J]. 岩土力学, 2016, 37(增刊 2): 578—588.
- ZHANG Lei, LI Dian-qing, TANG Xiao-song, et al. Bayesian Copula selection for shear strength parameters of soils and rocks[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2016, 37(Supp.2): 578—588.
- [18] WANG Y, ZHAO T, CAO Z J. Site-specific probability distribution of geotechnical properties[J]. **Computers and Geotechnics**, 2015, 70: 159—168.
- [19] STRAUB D, PAPAIOANNOU I. Bayesian updating with structural reliability methods[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 2015, 141(3): 04014134.
- [20] DER KIUREGHIAN A, LIU P L. Structural reliability under incomplete probability information[J]. **Journal of Engineering Mechanics**, 1986, 112(1): 85—104.
- [21] AU S K, BECK J L. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation[J]. **Probabilistic Engineering Mechanics**, 2001, 16(4): 263—277.
- [22] JIANG S H, HUANG J S. Efficient slope reliability analysis at low-probability levels in spatially variable soils[J]. **Computers and Geotechnics**, 2016, 75: 18—27.
- [23] GRIFFITHS D V, HUANG J, FENTON G A. Probabilistic infinite slope analysis[J]. **Computers and Geotechnics**, 2011, 38(4): 577—584.
- [24] CHO S E. Probabilistic stability analysis of rainfall-induced landslides considering spatial variability of permeability[J]. **Engineering Geology**, 2014, 171: 11—20.
- [25] DOU H, HAN T, GONG X, et al. Effects of the spatial variability of permeability on rainfall-induced landslides[J]. **Engineering Geology**, 2015, 192: 92—100.
- [26] OBERGUGGENBERGER M, FELLIN W. From probability to fuzzy sets: The struggle for meaning in geotechnical risk assessment[C]//PÖTTER R, KLAPPERICH H, SCHWEIGER H F. Probabilistic in Geotechnics: Technical and Economic Risk Estimation. Essen, Germany: Verlag Glückauf GmbH, 2002: 29—38.
- [27] GRIFFITHS D V, FENTON G A. Bearing capacity of spatially random soil: The undrained clay prandtl problem revisited[J]. **Géotechnique**, 2001, 51(4): 351—359.
- [28] 中华人民共和国建设部. GB50021—2001 岩土工程勘察规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2009.
- Ministry of Construction of the People's Republic of China. GB50021—2001 Code for investigation of geotechnical engineering[S]. Beijing: China Architecture and Building Press, 2009.
- [29] 张继周, 缪林昌. 岩土参数概率分布类型及其选择标准[J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(增刊 2): 3526—3532.
- ZHANG Ji-zhou, MIU Lin-chang. Types and selection criteria of probability distribution of rock and soil parameters[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2009, 28(Supp.2): 3526—3532.
- [30] LI D Q, JIANG S H, CHEN Y F, et al. System reliability analysis of rock slope stability involving correlated failure modes[J]. **KSCE Journal of Civil Engineering**, 2011, 15(8): 1349—1359.
- [31] JIANG T, LIU J, YUAN B, et al. Influence of probability distribution of shear strength parameters on reliability-based rock slope analysis[J]. **Slope Stability and Earth Retaining Walls**, 2011, (216): 65—72.
- [32] 崔洁, 江权, 冯夏庭, 等. 岩石抗剪强度参数的理论概率分布形态研究[J]. 岩土力学, 2015, 36(5): 1261—1274.
- CUI Jie, JIANG Quan, FENG Xia-ting, et al. Theoretical probability distribution of shear strength parameters for rock[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2015, 36(5): 1261—1274.